Woche 6

Vektorräume (4.1)

Frage	Antwort (per Beispiel)
Was ist ein Vektor?	Ein Element eines $\mathbb{R}^m$
Was ist ein Säugetier?	Eine Katze

Was wir wollen: Antwort per Definition!

A **mammal** (from Latin *mamma* 'breast')[1] is a vertebrate animal of the class **Mammalia** (/məˈmeɪli.ə/). Mammals are characterized by the presence of milk-producing mammary glands for feeding their young, a broad neocortex region of the brain, fur or hair, and three middle ear bones.

Ein Vektor ist ein Element eines Vektorraums.
Vektorräume sind durch zwei Operationen auf ihren Elementen charakterisiert: Vektoraddition und Skalarmultiplikation.

Definition 4.1: A *vector space* is a triple $(V, +, \cdot)$ where V is a set (the vectors), and

$$\begin{aligned} + &: V \times V \to V \quad \text{is a function (vector addition),} \\ \cdot &: \mathbb{R} \times V \to V \quad \text{is a function (scalar multiplication),} \end{aligned}$$

satisfying the following *axioms* (rules) for all $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ and all $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

1.	$\mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{w} + \mathbf{v}$	commutativity
2.	$\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$	associativity
3.	There is a vector $\mathbf{0}$ such that $\mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v}$ for all $\mathbf{v}$	zero vector
4.	There is a vector $-\mathbf{v}$ such that $\mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{0}$	negative vector
5.	$1 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}$	identity element
6.	$(\lambda \cdot \mu)\mathbf{v} = \lambda \cdot (\mu \cdot \mathbf{v})$	compatibility of $\cdot$ and $\cdot$ in $\mathbb{R}$
7.	$\lambda(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \lambda\mathbf{v} + \lambda\mathbf{w}$	distributivity over $+$
8.	$(\lambda + \mu)\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} + \mu\mathbf{v}$	distributivity over $+$ in $\mathbb{R}$

Beob 4.2. $(\mathbb{R}^m, +, \cdot)$ mit „+" und „·" wie in Def. 1.1 und 1.2 ist ein Vektorraum.

Beweis: Prüfe das Offensichtliche!

Def. 4.3: Ein Polynom p ist eine Summe der Form $$p = \sum_{i=0}^{m} p_i x^i,$$
für irgendein $m \in \mathbb{N}$. x ist eine Variable; $p_1, p_2 .. p_m$ sind reelle Zahlen (Koeffizienten). Grösste i, so dass $p_i \neq 0$ ist der Grad von p. Alle $p_i = 0$: Nullpolynom.

Beispiele:

$$p = 2x^2 + x + 1 \quad : \quad \text{Grad } 2$$
$$q = 5x - 2 \quad : \quad \text{Grad } 1$$
$$p + q = 2x^2 + 6x - 1 \quad : \quad „+"$$
$$5p = 10x^2 + 5x + 5 \quad : \quad „\cdot"$$

Lemma 4.4: Sei $\mathbb{R}[x]$ die Menge der Polynome in x. Dann ist $(\mathbb{R}[x], +, \cdot)$ ein Vektorraum.

Beweis: Prüfe das Offensichtliche!

Lemma 4.5. Sei $\mathbb{R}^{m \times n}$ die Menge der $m \times n$ Matrizen, mit $A + B$ und λA wie üblich (Def. 2.2). Dann ist $(\mathbb{R}^{m \times n}, +, \cdot)$ ein Vektorraum.

Vektorräume: benehmen sich „wie erwartet".

Beispiel:

Fakt 4.6.: Sei $(V, +, \cdot)$ ein Vektorraum. V enthält genau einen Nullvektor (ein Vektor, der Axiom 3 erfüllt):

1. $\mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{w} + \mathbf{v}$
2. $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$
3. There is a vector $\mathbf{0}$ such that $\mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v}$ for all $\mathbf{v}$
4. There is a vector $-\mathbf{v}$ such that $\mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{0}$
5. $1 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}$
6. $(\lambda \cdot \mu)\mathbf{v} = \lambda \cdot (\mu \cdot \mathbf{v})$
7. $\lambda(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \lambda\mathbf{v} + \lambda\mathbf{w}$
8. $(\lambda + \mu)\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} + \mu\mathbf{v}$

Beweis: Seien $0, 0'$ zwei Nullvektoren. Dann gilt

$$\begin{aligned} 0' &= 0' + 0 \quad (\text{Axiom 3: } 0 \text{ ist ein Nullvektor}) \\ &= 0 + 0' \quad (\text{Axiom 1}) \\ &= 0 \quad (\text{Axiom 3: } 0' \text{ ist ein Nullvektor}) \end{aligned}$$

Missbrauch der Notation: $(V, +, \cdot) \rightarrow V$

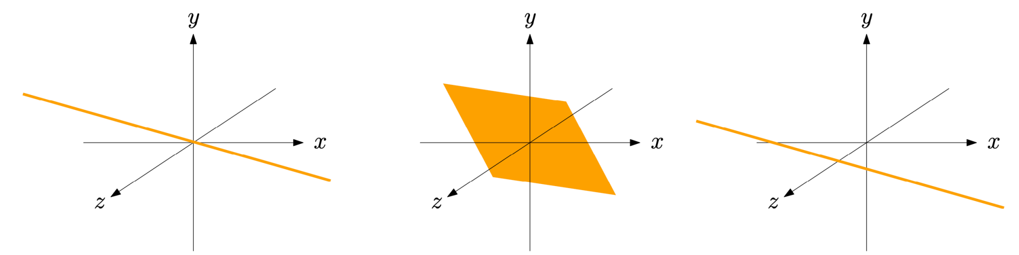
Unterräume:

Def. 4.8: Sei V ein Vektorraum. Eine nichtleere Teilmenge $U \subseteq V$ heisst Unterraum von V, wenn die folgenden zwei Axiome für alle $v, w \in U$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gelten:

(i) $v + w \in U$ (ii) $\lambda v \in U$

Wir haben immer $\mathbf{0} \in U$: nimm irgendein $u \in U$, dann ist nach (ii) auch $\underset{\text{Zahl } 0}{0}\, u = \underset{\text{Nullvektor}}{\mathbf{0}}$ in U.

Das benötigt Fakt 4.10



subspaces of R^3: a line — a plane — not a subspace (misses 0)

Lemma 4.11: Sei A eine $m \times n$ Matrix. Dann ist $C(A) = \{Ax : x \in \mathbb{R}^n\}$ ein Unterraum von $\mathbb{R}^m$.

Beweis: Seien $v, w \in C(A)$: es gibt $x, y \in \mathbb{R}^n$: $v = Ax$, $w = Ay$. Dann gilt:

$$A(\underbrace{x+y}_{\in \mathbb{R}^n}) = Ax + Ay = v + w,$$

also ist $v + w \in C(A)$.

Für $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

$$A(\underbrace{\lambda x}_{\in \mathbb{R}^n}) = \lambda Ax = \lambda v, \Rightarrow \lambda v \in C(A)$$

Lemma 4.12.: Sei V ein Vektorraum und $U \subseteq V$ ein Unterraum. Dann ist auch U ein Vektorraum (mit den gleichen $+$ und $\cdot$ wie in V).

Beweis: prüfe das (fast) Offensichtliche!

Unterräume von ..

.. $\mathbb{R}[x]$:

U = Die Polynome ohne konstanten Term:

$$p = \sum_{i=0}^{m} p_i x^i \quad \text{mit } p_0 = 0 \qquad (\text{z.B. } 2x^2+5x)$$

U = Die quadratischen Polynome

$$p = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 \quad : \text{„isomorph" zu } \mathbb{R}^3$$

$\mathbb{R}[x]$ „enthält" $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \ldots$ (konstante, lineare, quadratische, ... Polynome)

... $\mathbb{R}^{2\times 2}$:

U = Die symmetrischen Matrizen: $\begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix}$

U = Die Matrizen mit Spur 0: $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $a+d=0$.